LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 13

Linearna aproksimacija funkcije, kvadratna aproksimacija. Taylorov red

Lekcije iz Matematike 1.

13. Linearna aproksimacija funkcije, kvadratna aproksimacija. Taylorov red.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se razmatra primjena derivacije za približno računanje vrijednosti funkcija (linearna aproksimacija, kvadratna aproksimacija itd.), te razvoj u beskonačni (Taylorov) red važnih elementarnih funkcija.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problem računanja star je više tisuća godina. Usporedno s razvojem teoretskih osnova računanja ide tehnološki razvoj pomagala za računanje (danas su to kalkulatori i kompjutori).
Izvodjenje osnovnih računskih operacija relativno je jednostavno (iako i tu ima poteškoća), medjutim korjenovanje, a naročito logaritmiranje, računanje vrijednosti eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija uglavnom su neizvedivi (ukoliko želimo dobiti točne rezultate). Zato se pribjegava približnom računanju.
Teoretski temelj približnog računanja vrijednosti funkcija (aproksimacija) jesu derivacije, uz pomoć kojih se funkcija (na primjer *sinus*) približno može predočiti u obliku polinoma (linearne funkcije, kvadratne funkcije itd.), pa se, umjesto računanja vrijednosti (sinus) funkcije, računa vrijednost tog polinoma (što je u pravilu moguće).

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam i geometrijsko značenje derivacije, osnovne elementarne funkcije te njihove derivacije.
Za kvadratnu aproksimaciju i za aproksimacije višeg reda potreban je pojam derivacije drugog reda i višeg reda.

Druga derivacija f'' **funkcije** f, je, prema definiciji, derivacija prve derivacije, dakle
$f'' = (f')'$

Treća derivacija je derivacija druge derivacije itd:
$f''' := (f'')'$
$f^{IV} := (f''')'$ itd.

n-ta derivacija piše se kao $f^{(n)}$.

Na primjer, ako je $f(x) := \sin x$, onda je:
$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$ itd.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Linearna aproksimacija

1. **Analitički pristup**. Iz formule za derivaciju:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

vidi se da je

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(izbacili smo limes, ali smo umjesto znaka jednakosti stavili znak približne jednakosti; tu pretpostavljamo da je Δx relativno malen - blizu nule; lijeva je strana to bliže desnoj što je Δx manje),
što se može zapisati i ovako:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

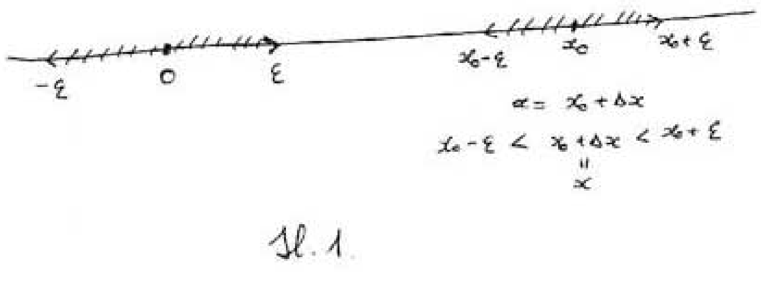
To je formula za **linearnu aproksimaciju** funkcije f oko x_0.
Dio $f'(x_0) \cdot \Delta x$ je **približni prirast** funkcije f kad se argument mijenja od x_0 do $x_0 + \Delta x$.

Alternativni zapis formule za linearnu aproksimaciju

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

(lijevo je neka bilo koja elementarna funkcija, a desno linearna)

Tu formulu dobijemo tako da u originalnu stavimo x umjesto $x_0 + \Delta x$, odnosno, dosljedno tome, $x - x_0$ umjesto Δx. Kraće: $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta x = x - x_0$. Uočite (sl.1.), ako se Δx mijenja oko nule (na primjer ako je $-\epsilon < \Delta x < \epsilon$), onda se x, tj. $x_0 + \Delta x$ mijenja oko x_0, preciznije: $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$.



Sl. 1

Važnost formule za linearnu aproksimaciju

Iz formule vidimo sljedeće:
Ako znademo $f(x_0)$ i $f'(x_0)$ onda ćemo, mijenjajući Δx oko nule, moći približno odrediti vrijednosti funkcije f oko x_0. Razlika izmedju stvarne vrijednosti (koju u pravilu ne znamo) i približne vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom (koju znamo), zove se **pogrješka linearne aproksimacije**. Kraće:

Pogrješka=Stvarna vrijednost - Približna vrijednost

To ilustriramo na primjeru.

Primjer 1. Ne koristeći kalkulator (ili neko drugo pomagalo) približno izračunajmo $\sqrt{98}, \sqrt{99}, \sqrt{100}, \sqrt{101}, \sqrt{102}$.

Tu je $f(x) := \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pa vidimo da je dobro uzeti $x_0 := 100$, jer je
$f(100) = \sqrt{100} = 10$ i
$f'(100) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100}} = 0.05$
Da približno odredimo $\sqrt{101}$ treba u formulu za linearnu aproksimaciju uvrstiti $\Delta x = 1$:

$$\sqrt{101} \approx 10 + 0.05 \cdot 1 = 10.05$$

Mijenjajući Δx (da bude redom $-2, -1, 0, 1, 2$ dobijemo sljedeću tablicu (u 2. redku su odgovarajuće vrijednosti dobivene kalkulatorom, zaokružene na 6 decimala, u 3. su približne vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom, a u 4. je pogrješka aproksimacije tj. razlika podatka 2. i 3. redka - to je, u stvarnosti, približna pogrješka jer smo podatke 2. redka dobili zaokruživanjem).

x	98	99	100	101	102
$\sqrt{x}$	9.899495	9.949874	10.	10.049876	10.099505
lin. aproks.	9.900 000	9.950 000	10.	10.050 000	10.100 000
pogrješka d(x)	-0.000505	-0.000126	0.	-0.000124	-0.000495

lin. aproks. $= 10 + 0.05(x - 100)$

Služimo se formulom:

$$\sqrt{100 + \Delta x} \approx 10 + 0.05\Delta x$$

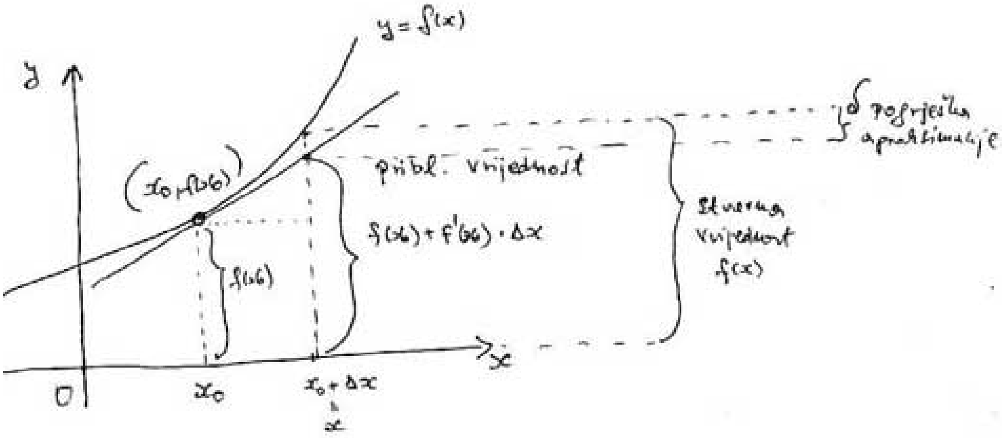
a možemo i formulom

$$\sqrt{x} \approx 10 + 0.05(x - 100)$$

u kojoj redom stavljamo $x = 98, 99, 100, 101, 102$ (jasno je da smo mogli desnu stranu srediti i dobiti $\sqrt{x} \approx 0.05x + 5$)

Uočimo sljedeće:
(i) Za manji Δx (po apsolutnoj vrijednosti), aproksimacija je bolja, a za $\Delta x = 0$ dobijemo točnu vrijednost, što vrijedi općenito.
(ii) Vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom (u ovom primjeru) veće su od stvarnih.
(iii) Za pozitivne Δx aproksimacija je bolja od odgovarajućih negativnih (u ovom primjeru).
Pokušajte objasniti te činjenice.

2. Geometrijski pristup - geometrijska interpretacija formule za linearnu aproksimaciju (sl.2)

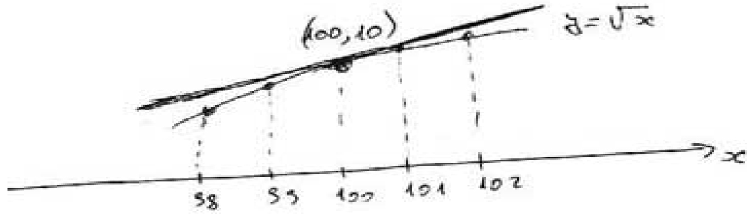


sl.2.

Geometrijski, linearna se aproksimacija temelji na intuitivno jasnu načelu da se od svih pravaca koji prolaze točkom $(x_0, f(x_0))$, grafu funkcije f najbolje "priljubljuje" tangenta u toj točki na graf.

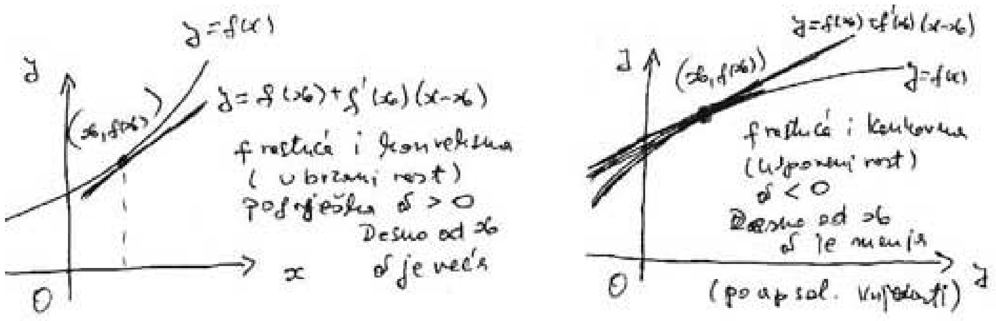
Primjer 2. Geometrijski predočimo i objasnimo Primjer 1.

Na sl.3. vidimo da je tangenta na graf funkcije $f(x) := \sqrt{x}$ u točki grafa $(100, 10)$ iznad grafa. Pri linearnoj aproksimaciji očitavamo vrijednosti ordinata na tangenti (što su približne vrijednosti) , a ne na grafu funkcije (što su stvarne vrijednosti). Sad možemo pojasniti (i), (ii) i (iii) iz Primjera 1.



sl. 3.

(i) Za manje Δx (po apsolutnoj vrijednosti) aproksimacije su bolje jer su pogrješke aproksimacije manje (tangenta je bliže grafu).
(ii) približne su vrijednosti veće od stvarnih jer je tangenta iznad grafa (tj. jer je f konkavna funkcija).
(iii) Pogrješke aproksimacije manje su za pozitivne Δx jer je f oko $x_0 = 10$ ima usporeni rast (tj. rastuća je i konkavna).
Općenita veza izmedju pogrješke linearne aproksimacije s jedne strane i rasta, pada, konveksnosti i konkavnosti, s druge strane, predočena je na sl.4.



Sl. 4.

Kvadratna aproksimacija.

Kod linearne aproksimacije funkcije f oko x_0 imali smo sljedeće:
1. funkciju f i realan broj x_0 oko kojega je f definirana.
2. **linearnu funkciju** $g(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Funkciju f oko x_0 aproksimirali smo linearnom funkcijom g, tj.
$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Uočimo ovo:
(0) $g(x_0) = f(x_0)$ i
(1) $g'(x_0) = f'(x_0)$
tj. f i g imaju jednake vrijednosti u x_0 i jednake vrijednosti derivacija u x_0. Naime,
$g(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) + 0 = f(x_0)$ i
$g'(x) := 0 + f'(x_0) \cdot 1 = f'(x_0)$ za sve x, pa i za $x = x_0$.

Uočavamo da je "razumno" definirati **kvadratnu aproksimaciju** funkcije f oko x_0 kao kvadratnu funkciju h koja u x_0 ima jednake vrijednosti i jednake 1. derivacije i jednake 2. derivacije kao i f, tj. za koju vrijedi:
(0) $h(x_0) = f(x_0)$ i
(1) $h'(x_0) = f'(x_0)$ i
(2) $h''(x_0) = f''(x_0)$

Da bismo odredili h, u ovisnosti o f i x_0, napišimo je po potencijama od $x - x_0$, tj.

$$h(x) := c + b(x - x_0) + a(x - x_0)^2$$

Treba odrediti koeficijente a, b, c.

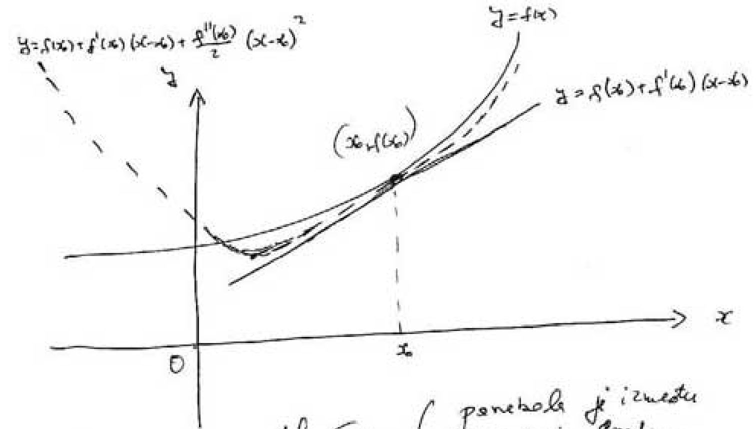
Vidimo da je:
$h'(x) = b + 2a(x - x_0)$ i $h''(x) = 2a$. Zato je
$h(x_0) = c$ i $h'(x_0) = b$ i $h''(x_0) = 2a$
Uvrštavanjem u (0), (1), (2), dobijemo:
$c = f(x_0)$ i $b = f'(x_0)$ i $a = \frac{f''(x_0)}{2}$
Zato je $h(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$, tj.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

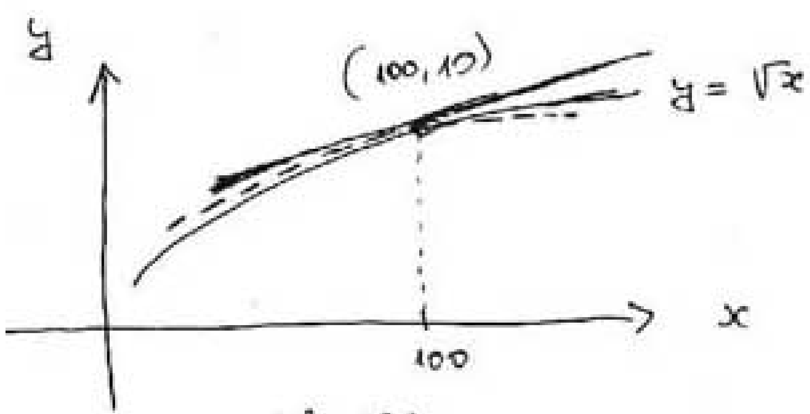
To je **formula za kvadratnu aproksimaciju funkcije f u x_0**.
Vidimo da je linearni dio desne strane jednak onome kod linearne aproksimacije, pa se ta formula može smatrati korekcijom linearne: dodan je **kvadratni član** $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.
Formulu možemo zapisati i pomoću Δx zamjenom $x = x_0 + \Delta x$ i $x - x_0 = \Delta x$.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2$$

Geometrijska interpretacija kvadratne aproksimacije (sl.5).



sl. 5a. (parabola je između tangente i grafa, u okolini x_0)



sl. 5b.

Primjer 3. Pomoću kvadratne aproksimacije približno izračunajmo $\sqrt{98}, \sqrt{99}, \sqrt{100}, \sqrt{101}, \sqrt{102}$. Rezultate usporedimo s Primjerom 1. gdje smo koristili linearnu aproksimaciju.

x	98	99	100	101	102
$\sqrt{x}$	9.899495	9.949874	10.	10.049876	10.099505
kvadr. aproks.	9.899500	9.949875	10.	10.049875	10.099950
pogr. aproks.	−0.000005	−0.000001	0.	0.000001	0.000005

$$\text{kvodr. aproks.} = 10 + 0.05(x-100) - \frac{1}{8000}(x-100)^2$$

Aproksimacije višeg reda.

Analogno linearnoj aproksimaciji (aproksimacijama 1. i 2. reda) definiramo **kubnu aproksimaciju** (aproksimaciju 3. reda) i, općenito, aproksimaciju n-tog reda.
Prisjetimo se faktorijela: $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$,
posebno: $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6$ i, prema dogovoru $0! = 0$

Kubna aproksimacija

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

ili, u drugom zapisu

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3$$

Aproksimacija n-tog reda.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ili, u drugom zapisu

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n$$

Primjer 4. - aproksimacija eksponencijalne funkcije oko nule.
(a) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda eksponencijalne funkcije oko nule.
(b) približno izračunajmo broj e.

Aproksimacija će biti po potencijama od x (jer je $x_0 = 0$).
(a) Tu je $f(x) := e^x$ i $x_0 = 0$, pa je $f(0) = e^0 = 1$ i $f^{(n)}(0) = 1$ za sve n. Zato je:

(0) Nulta aproksimacija: $e^x \approx 1$
(1) Linearna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x$
(2) Kvadratna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$
(3) Kubna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
(3) Aproksimacija 4. reda: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

(3) Aproksimacija n-tog reda:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

(b) Iskoristit ćemo (a) i činjenicu da je $e = e^1$ pa u formule za aproksimaciju stavljamo $x = 1$. Napomenimo da je (kalkulator):

$$e \approx 2.72$$

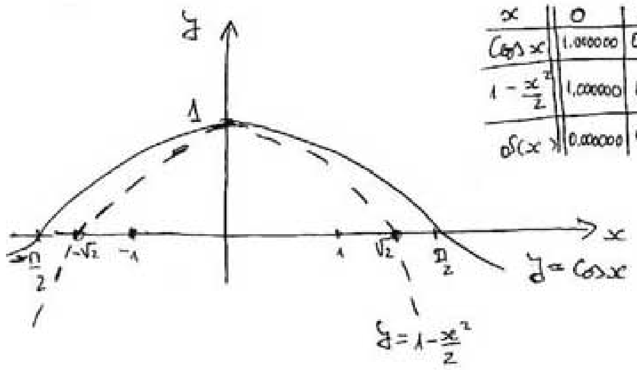
(zaokruženo na 2 decimale).

(0) Nulta aproksimacija: $e \approx 1$ (loše)
(1) Linearna aproksimacija: $e \approx 1 + 1 = 2$ (bolje, ali i dalje loše)
(2) Kvadratna aproksimacija: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5$ (još bolje, ali i dalje loše)
(3) Kubna aproksimacija: $e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2.666...$ (blizu, ali bi moglo bliže)
(3) Aproksimacija 4. reda: $e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \approx 2.71$ (zaokruženo na dvije decimale - točno na jednu decimalu)

Primjer 5. - aproksimacija sinusa i kosinusa oko nule.
(a) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda funkcije kosinus oko nule.
(a) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda funkcije sinus oko nule.

(a) Tu je $f(x) := \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{IV}(x) = \cos x$, pa je :
$f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(0) = -\sin 0 = 0$, $f''(0) = -\cos 0 = -1$, $f'''(0) = \sin 0 = 0$, $f^{IV}(0) = \cos 0 = 1$.
Zato je
(0) Nulta aproksimacija: $\cos x \approx 1$
(1) Linearna aproksimacija: $\cos x \approx 1$ (kao i linearna)
(2) Kvadratna aproksimacija: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ (sl.6).

x	0	0.2	0.5	1	2
$\cos x$	1.000000	0.980067	0.877583	+0.540302	-0.416145
$1-\frac{x^2}{2}$	1.000000	0.980000	0.875000	0.500000	-1.000000
$\delta(x)$	0.000000	0.000067	0.002583	0.040302	0.583853



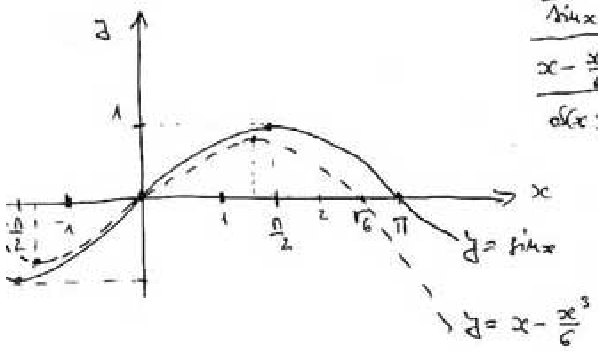
Sl. 6.

(3) Kubna aproksimacija: (kao i kvadratna)
(4) Aproksimacija 4. reda: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

(b) Tu je $f(x) := \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$, pa je
$f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(x) = -\sin 0 = 0$, $f'''(x) = -\cos 0 = -1$, $f^{IV}(0) = \sin 0 = 0$. Zato je

(0) Nulta aproksimacija: $\sin x \approx 0$
(1) Linearna aproksimacija: $\sin x \approx x$
(2) Kvadratna aproksimacija: $\sin \approx x$ (kao i linearna)
(3) Kubna aproksimacija: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ (sl.7).

x	0	0.2	0.5	1	2
$\sin x$	0.000000	0.198669	0.479426	0.841471	0.909297
$x-\frac{x^3}{6}$	0.000000	0.198667	0.479167	0.833333	0.666667
$\delta(x)$	0.000000	0.000002	0.000259	0.008138	0.242630



Sl. 7.

(4) Aproksimacija 4. reda: Isto kao i za kubnu.

Taylorov red - razvoj funkcije.

Sjetimo se aproksimacije n-tog reda (elementarne) funkcije f oko x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tu je na lijevoj strani neka elementarna funkcija f, a na desnoj polinom n-tog stupnja napisan po potencijama od $x - x_0$. Lijeva je strana to bliže desnoj što je x bliže x_0 (za x relativno blizu x_0). Takodjer, za fiksirani x blizu x_0, lijeva je strana to bliža desnoj što je stupanj n veći. Ako n pustimo da ide u beskonačnost, dobit ćemo jednakost

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ...$$

(tri točkice označuju da se zbrajanje nastavlja prema istom pravilu i nikad ne prestaje).
To je **Taylorov razvoj funkcije** f **oko** x_0 (točnije, Taylorov razvoj je desna strana).
Tu je umjesto približne vrijednosti stavljena jednakost, ali je zato umjesto konačnog reda (polinoma), sad na desnoj strani beskonačan red ("polinom beskonačna stupnja u potencijama od $x - x_0$) ").

Za koje x vrijedi jednakost u Taylorovu razvoju?
Jednakost u Taylorovu razvoju **može, ali ne mora** vrijediti za sve x iz područja definicije funkcije f. Skup svih x za koje jednakost vrijedi zove se **područje konvergencije reda - razvoja**.
Na primjer, za eksponencijalnu funkciju, sinus i kosinus, područje konvergencije je skup svih realnih brojeva $\mathbf{R}$:
Dakle, **sljedeće jednakosti vrijede za sve** x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Kraće, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Kraće, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

Kraće, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Da područje konvergencije može biti manje od domene pokazuju sljedeći primjeri.

Primjer 6. - geometrijski red - vrlo važan red.
Odredimo Taylorov red funkcije $f(x) := \frac{1}{1-x}$ oko nule.

Postupajući kao i prije, dobijemo:
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
Red na desnoj strani zove se **geometrijski red**. Ta se jednakost obično piše tako da lijevo bude geometrijski red, zato što je to kompliciraniji dio formule:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$$

Ta se formula često zove: **zbroj geometrijskog reda**. Formula vrijedi za $-1 < x < 1$, tj. interval $< -1, 1 >$ je **područje konvergencije**, a kako je on simetričan s obzirom na ishodište, broj 1 se zove **radijus konvergencije**.
Provjerimo formalno jednakost. Množenjem s $1-x$, vidimo da bi trebalo biti: $(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + ...) = 1$. Zaista,

$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + ...) =$
$(1 + x + x^2 + x^3 + ...) - x(1 + x + x^2 + x^3 + ...) =$
$(1 + x + x^2 + x^3 + ...) - (x + x^2 + x^3 + ...) = 1.$
Zašto jednakost ne vrijedi za sve x iako "izgleda" da smo ga provjerili za sve x?.
Uočite da smo pri "provjeri" koristili distribuciju množenja prema beskonačnom zbroju, medjutim takvo pravilo općenito vrijedi samo za konačan zbroj.

Primjer 7. geometrijski red - nastavak.
Uvrstimo redom umjesto x brojeve $2, 1, 0, \frac{1}{2}, , -\frac{1}{2}, 2, -1$ u formulu za zbroj geometrijskog reda i provjerimo smisao.

Uočimo, na početku:
1. U $\frac{1}{1-x}$ možemo uvrstiti sve x osim $x = 1$ (jer se tada pojavi nula u nazivniku).
2. Pri uvrštavanju u $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ može nastati problem jer treba zbrojiti beskonačno mnogo brojeva.

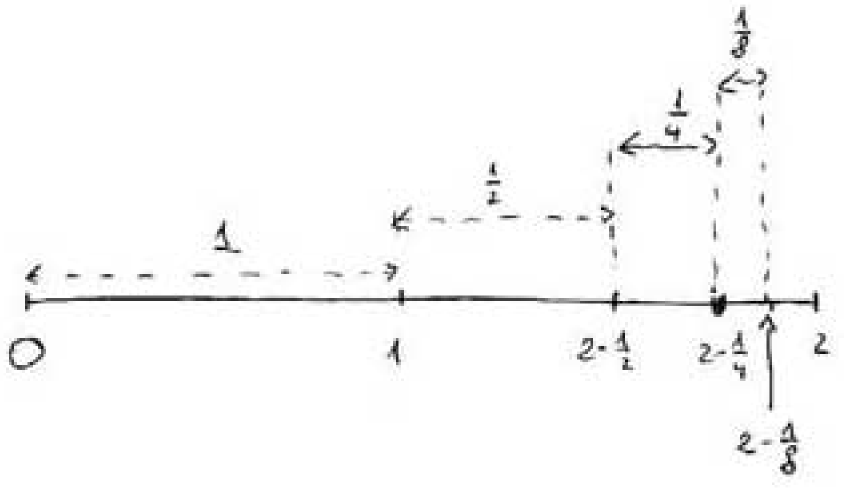
$x = 2$, dobijemo: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... = \frac{1}{1-2}$, što nema smisla jer lijeva strana ide u $+\infty$, a desna je -1. Zato 2 nije u području konvergencije.

$x = 1$, dobijemo $1 + 1 + 1^2 + 1^3 + ... = \frac{1}{1-1}$, što nema smisla jer lijeva strana ide u $+\infty$ (što nije broj), a desna nije definirana. Zato 1 nije u području konvergencije.
To se ipak malo razlikuje od prehodnog slučaja jer netko može interpretirati $\frac{1}{0}$ kao $+\infty$, pa s obje strane jednakosti imamo $+\infty$ (problem je što to nije broj).

$x = 0$, dobijemo $1 + 0 + 0^2 + 0^3 + ... = \frac{1}{1-0}$, što je istinito (beskonačna je suma postala konačna). Zato je 0 u području konvergencije.

$x = \frac{1}{2}$, dobijemo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
To je istinita jednakost, jer zbrajajući član po član vidimo (sl.8):
$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$



Sl. 8.

Općenito:
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$
pa lijeva strana teži u 2 kad n teži u $+\infty$. To se piše ovako:
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... =:$
$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}) =$
$\lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{2^n}) =$
$2 - 0 = 2.$

$x = -\frac{1}{2}$, dobijemo $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - ... = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2}})) = \frac{2}{3}$
To je istinita jednakost, u što se možemo uvjeriti zbrajajući član po član:

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = \frac{2}{3} - \frac{1}{24}$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} = \frac{2}{3} + \frac{1}{48}$
Sad uočavamo pravilo (mogli bismo ga i općenito zapisati) i vidimo da se zbrajajući sve više članova približavamo prema $\frac{2}{3}$, malo s lijeva, malo s desna.

$x = -2$, dobijemo $1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + ... = \frac{1}{1-(-2)}$, tj.
$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - ... = \frac{1}{3}$
što nije istinito, jer se zbrajanjem sve više članova, redom dobivaju brojevi: $1, -1, 3, -5, 9, -23, 41, -...$ što se ne približava ni prema jednom broju (nema limesa). Zato -2 nije u području konvergencije.

$x = -1$, dobijemo $1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + ... = \frac{1}{1-(-1)}$, tj.
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = \frac{1}{2}$

što nije istinito, jer se zbrajanjem sve više članova, redom dobivaju brojevi: $1, 0, 1, 0, 1, ...$ što se ne približava ni prema jednom broju (nema limesa). Zato -1 nije u području konvergencije.
Napomenimo da i uvoj nekorektnoj jednakosti postoji neki "prikriveni smisao". Naime, pri zbrajanju, član po član, dobijaju se ravnopravno brojevi 1 i 0, što je, u prosjeku $\frac{1}{2}$.

Kako se općenito dokazuje da je područje konvergencije geometrijskog reda interval $< -1, 1 >$ i kako se izvodi formula?

Koristeći **formulu za zbroj konačnog geometrijskog reda**:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x},\ x \neq 1$$

lako se vidi da geometrijski red ima smisla samo za $-1 < x < 1$ i da mu je zbroj $\frac{1}{1-x}$ (jer se za $-1 < x < 1$ potencija x^{n+1} smanjuje sve više (po apsolutnoj vrijednosti) i teži k nuli).

Primjer 8. - Taylorov razvoj logaritamske funkcije.

Logaritamska funkcija nije definirana u nuli pa nema razvoja oko nule. Razmotrit ćemo, stoga, razvoj oko $x_0 = 1$. Imamo:
$f(x) := \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{x^3},\ f^{IV}(x) = -\frac{3!}{x^4}$ i, općenito

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

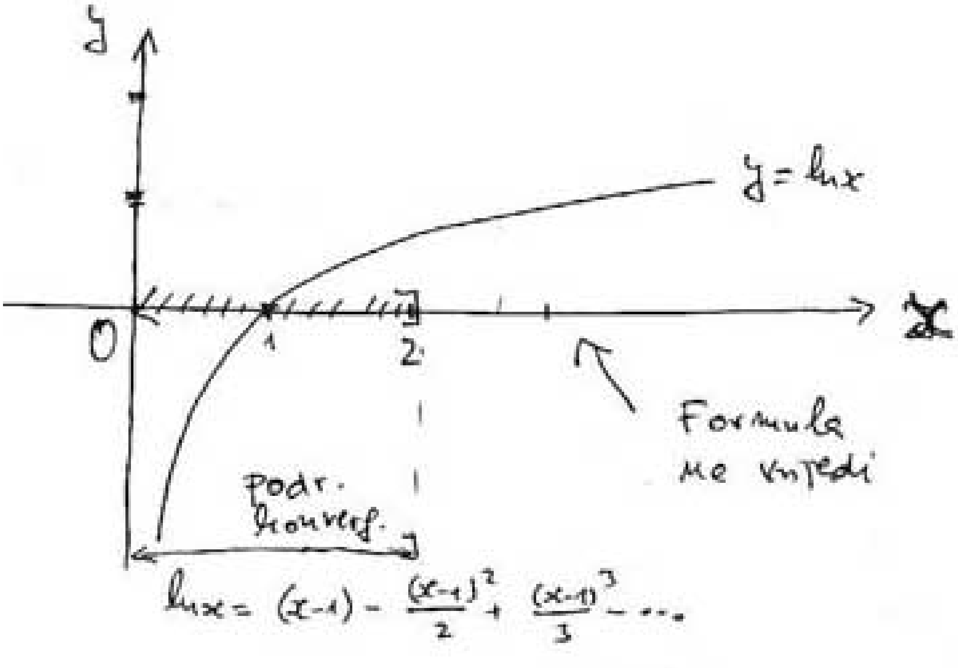
Zato je $f(1) = \ln 1 = 0,\ f'(1) = \frac{1}{1} = 1,\ f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1,\ f'''(1) = \frac{1\cdot 2}{1^3} = 2!,\ f^{IV}(1) = -\frac{3!}{1^4} = -3!$ i, općenito

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{1^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Odavde dobijemo
$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + ...$
$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ...$
ili, kraće

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

Može se pokazati da je područje konvergencije reda za $0 < x \leq 2$.
Vidimo da je to za 1 lijevo i desno od sredine intervala, pa broj 1 zovemo **radijus konvergencije** (sl.9.).



Sl. 9.

Primjer 9. Bez korištenja kalkulatora (ili nekog drugog pomagala) približno izračunajmo $\ln 2$.

Uvrstimo $x = 2$ u formulu za razvoj logaritamske funkcije oko 1. Dobijemo

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Uočavamo da nam je potrebno zbrojiti mnogo članova (to je zato što je red **alternativan - izmjenjuju mu se predznaci**), kažemo da **sporo konvergira**. Koristeći se svojstvima logaritamske funkcije to možemo izbjeći ovako:

$$\ln(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n(\frac{1}{2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n \cdot 2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Sad, koristeći da je $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, dobijemo

$$\ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} + \ldots \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160} = \frac{661}{960}$$

Dakle, zbrajanjem prvih 5 članova, dobili smo $\ln 2 \approx 0.69$, što je točno na dvije decimale. S prvih 5 članova alternativnog reda dobili bismo puno slabije: $\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \approx 0.78$

Uočite da je ovdje područje konvergencije **poluzatvoreni interval**, za razliku od geometrijskog reda, gdje je to bio **otvoreni interval**. Napomenimo, ipak, da uvrštavanje $x = 0$ u razvoj logaritamske funkcije oko 1 **nije bez ikakva**

smisla. Naime, dobije se:

$$\ln 0 = -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...)$$

Red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

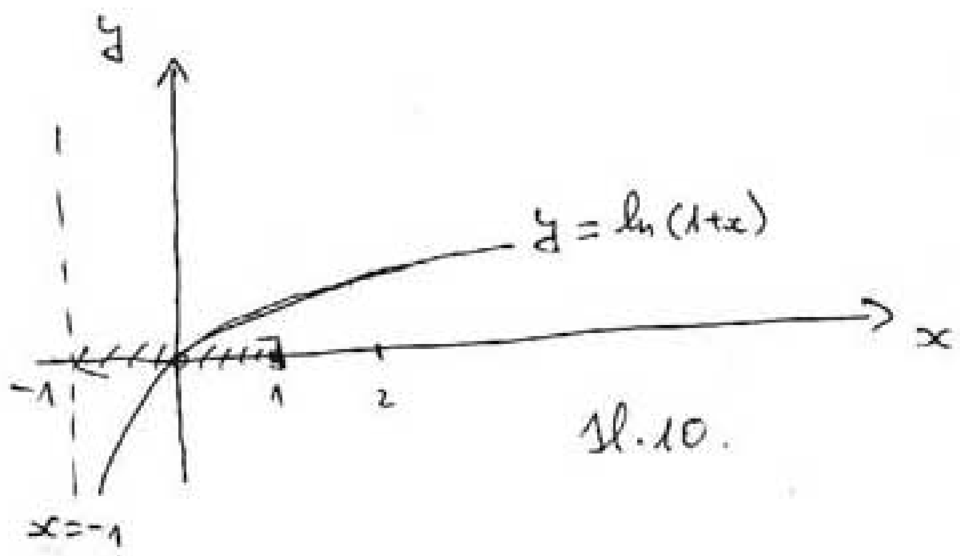
zove **harmonijski red** i nije teško pokazati da je njegova suma $+\infty$, pa gornja jednakost postaje $\ln 0 = -\infty$, što matematički nije potpuno korektno (jer u toj jednakosti ne sudjeluju brojevi), medjutim, ta je "jednakost" odraz istinite činjenice da se vrijednosti ln funkcije približavaju $-\infty$ kad se vrijednosti argumenta približavaju k 0, tj.

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Taylorov red za logaritamsku funkciju često se piše tako da se umjesto x stavi $x + 1$, odnosno umjesto $x - 1$ stavi x. Tako dobijemo Taylorov red oko nule:
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$, ili, kraće

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

koji konvergira za $-1 < x \leq 1$ (sl.10.).



sl.10.